数理解析研究所講究録
376巻 1980年 113-146

半群と境界値問題

筑波大 数学系　　平良和昭

§0. 序

本稿では，[23], [24] に引き続いて『なめらかな境界 ∂D をもつ $\mathbb{R}^N$ の有界領域 D における拡散過程（Markov 過程）$\mathcal{M}$ を構成せよ』という確率論の問題について考える．これは，函数解析的には『$\bar{D}$ $(= D \cup \partial D)$ 上の実数値連続函数の空間 $C(\bar{D})$ 上の非負且縮小的な (C_0) 型半群（Feller 半群）$\{T_t\}_{0 \leq t < \infty}$ を構成せよ』という問題として定式化される．さらに，拡散現象が"局所的"且"連続的"ならば，Hille-Yosida の半群の理論によって，問題は偏微分方程式論における 2 階の退化する楕円型微分作用素 A に対する境界値問題の一意可解性の問題へと帰着される．これらのことを確率論的にいえば，$\bar{D}$ 上の拡散過程 $\mathcal{M}$ が領域の内部 D での粒子の運動を支配する拡散方程式 $\frac{\partial}{\partial t} - A$ と境界 ∂D での粒子の挙動を規制する境界条件 L（Ventcel' の境界条件）とによって特徴付けられ

ることを意味する．あるいは函数解析的にいえば，$\bar{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0\leq t<\infty}$ の生成作用素 $\mathfrak{A}$ $(T_t = e^{t\mathfrak{A}})$ が２階の微分作用素 A と Ventcel' の境界条件 L とによって特徴付けられることを意味する．このようにして，確率論における拡散過程，函数解析における半群，偏微分方程式論における境界値問題の三つのテーマが密接に結びつく．

われわれの目的は，上にのべたような確率論的背景を念頭において境界値問題を解くことにより，偏微分方程式論の立場から $\bar{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0\leq t<\infty}$ を構成することである．§１では問題の Reduction を行ない，§２では $\bar{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}$ が存在するための十分条件を，A と L の境界値問題に対する解の存在，一意性，正則性の条件の形でのべる（定理 2.5，定理 2.7，系 2.9）．§３では微分作用素 A が楕円型の場合に，粒子の運動に密着した具体的な十分条件を与える（定理 3.1）．§４では定理 2.5，定理 2.7，系 2.9，§５では定理 3.1 について証明の概略をのべる．証明の本質的な部分は [23]，[24] と同じである．

§１．問題の Reduction

まず，われわれが考察の対象とする半群の正確な定義をの

べよう（[2], [20]）.

<u>定義 1.1</u>　$C(\bar{D})$ 上の有界線型作用素の族 $\{T_t\}_{0\leqq t<\infty}$ が次の条件をみたすとき，$\{T_t\}$ を $\bar{D}$ 上の <u>Feller 半群</u>という.

i)　$T_t \cdot T_s = T_{t+s}$,　$T_0 = I$　（半群の性質）.

ii)　$\{T_t\}$ は $0 \leqq t < \infty$ で t に関して強連続である，すなわち，各 $f \in C(\bar{D})$ に対して

$$\lim_{t\to s} T_t f = T_s f \quad in \quad C(\bar{D}) \qquad (0 \leqq s < \infty).$$

iii)　$\{T_t\}$ は $C(\bar{D})$ 上で非負且縮小的である，すなわち，

$$f \in C(\bar{D}),\ 0 \leqq f \leqq 1 \implies 0 \leqq T_t f \leqq 1 \quad (0 \leqq t < \infty).$$

<u>注意 1.2</u>　$\bar{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}$ に対して $\bar{D}$ 上の Markov 過程 $\mathcal{M}$ が存在し，その遷移確率系を $\{p(t,x,dy)\}$ とすると，関係式：

$$(1.1) \qquad T_t f(x) = \int_{\bar{D}} p(t,x,dy) f(y), \quad f \in C(\bar{D})$$

が成立することが知られている（[13], [14]）.

さて，われわれは次の問題を考えよう.

$\boxed{\text{問題 I}}$　"$\bar{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0\leqq t<\infty}$ をすべて求めよ".

この問題は，$N=1$ の場合，Feller [6], [7], Dynkin [4], Itô-Mckean [15], Ray [19] 等によって解析的にも確率論的にも完全に解決されている. 従って，以下では <u>$N \geqq 2$</u> とする.

よく知られた Hille-Yosida の半群の理論によって，Feller 半

群 $\{T_t\}_{0\leqq t<\infty}$ はその生成作用素 $\mathfrak{A}$ によって次のように特徴付けられる（[8], [29]）.

<u>定理 1.3</u>　i) $\{T_t\}_{0\leqq t<\infty}$ を $\bar{D}$ 上の Feller 半群とする．その生成作用素 $\mathfrak{A}: C(\bar{D}) \to C(\bar{D})$ を

$$(1.2)\qquad \lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t u - u}{t} = \mathfrak{A}u$$

で定義する．$\mathfrak{A}$ の定義域 $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ は (1.2)式の左辺が存在するような u の全体である．

このとき，次が成り立つ：

a) 定義域 $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ は $C(\bar{D})$ の dense な部分空間である．

b) $\alpha > 0$ ならば，任意の $f \in C(\bar{D})$ に対して $(\alpha - \mathfrak{A})u = f$ をみたす $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ が存在して一意的である．従って，$\alpha > 0$ に対して Green 作用素 $(\alpha - \mathfrak{A})^{-1}: C(\bar{D}) \to C(\bar{D})$ を $u = (\alpha - \mathfrak{A})^{-1}f$, $f \in C(\bar{D})$ で定義することができる．

c) $(\alpha - \mathfrak{A})^{-1}$ は $C(\bar{D})$ 上で非負である，すなわち，

$$f \in C(\bar{D}),\ f \geqq 0 \implies (\alpha - \mathfrak{A})^{-1}f \geqq 0.$$

d) $(\alpha - \mathfrak{A})^{-1}1 \leqq \dfrac{1}{\alpha}$　$(\alpha > 0)$.

ii) 逆に，$\mathfrak{A}: C(\bar{D}) \to C(\bar{D})$ が a) をみたす線型作用素であって，さらに，ある $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ が存在して $\alpha > \alpha_0$ をみたすすべての α に対して b) ～ d) が成立すれば，$\mathfrak{A}$ は $\bar{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0\leqq t<\infty}$ を生成する．

定理 1.3 の ii) の部分をより使いやすい形にかきかえておこ

う（[20]）.

<u>定理 1.4</u>　K をコンパクトな距離空間, $C(K)$ を K 上の実数値連続函数の空間とする.

i)　線型作用素 $B: C(K) \to C(K)$ が次の条件をみたしているとする.

a)′　定義域 $\mathcal{D}(B)$ は $C(K)$ で dense である.

b)′　$\max_{x \in K} f(x) > 0$ をみたす任意の $f \in \mathcal{D}(B)$ に対して, K の点 x' が存在して $f(x') = \max_{x \in K} f(x)$, $Bf(x') \leqq 0$ が成り立つ.

このとき, B の $C(K)$ における最小閉拡張 $\overline{B}$ が存在する.

ii)　条件 a)′, b)′ をみたす線型作用素 B が, さらに, 次の条件をみたしているとする.

c)′　ある $\alpha_0 \geqq 0$ に対して, 作用素 $\alpha_0 - B$ の値域 $\mathcal{R}(\alpha_0 - B)$ は $C(K)$ で dense である.

このとき, i) で存在の保証されている B の最小閉拡張 $\overline{B}$ は K 上の Feller 半群 $\{S_t\}_{0 \leqq t < \infty}$（定義 1.1 を参照）を生成する.

注意 1.2 でのべたように, $\overline{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0 \leqq t < \infty}$ には $\overline{D}$ 上の Markov 過程 $\mathcal{M}$ が対応し, (1.1) 式, (1.2) 式によって $\{T_t\}$ の生成作用素 $\mathfrak{A}$ と $\mathcal{M}$ の遷移確率系 $\{p(t, x, dy)\}$ との間に次の関係式が成立する:

$$(1.3)\qquad \mathfrak{A}u(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t u(x) - u(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\overline{D}} u(y)\, p(t, x, dy) - u(x) \right).$$

そこで，$\{p(t, x, dy)\}$ に関する"局所性"と"連続性"の仮定のもとに，(1.3)式から $\mathfrak{A}$ の具体的な形を導いてみよう．

1) x は内部 D の点とする．もし Markov 過程 $\mathfrak{M}$ が短時間で急激に遠方まで拡散していくような"異常"な過程でなければ（例えば $N=1$ の場合，3次以上のモーメントがすべて消えれば），$u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \cap C^2(D)$ を仮定して (1.3) 式において $u(y)$ を $y=x$ で第2次偏導函数まで Taylor 展開すれば，形式的に

$$(1.4)\qquad \mathfrak{A}u(x) = \lim_{t \downarrow 0} \left[\frac{1}{t} \left(\int_{\overline{D}} p(t, x, dy) - 1 \right) u(x) \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{t} \int_{\overline{D}} (y_i - x_i)\, p(t, x, dy) \right) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \sum_{i,j=1}^{N} \left(\frac{1}{t} \int_{\overline{D}} \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{2}\, p(t, x, dy) \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]$$

とかける．u の第3次以上の偏導函数の項は無視してもよいというのが，$\{p(t, x, dy)\}$ に対する"局所性"の仮定である．

さらに，$t \downarrow 0$ のとき (1.4) 式の各項の極限値：

$$(1.5)\qquad \begin{cases} c(x) = \lim_{t \downarrow 0} \dfrac{1}{t} \left(\int_{\overline{D}} p(t, x, dy) - 1 \right); \\[2ex] b^i(x) = \lim_{t \downarrow 0} \dfrac{1}{t} \int_{\overline{D}} (y_i - x_i)\, p(t, x, dy) \quad (1 \leq i \leq N); \\[2ex] a^{ij}(x) = \lim_{t \downarrow 0} \dfrac{1}{t} \int_{\overline{D}} \dfrac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{2}\, p(t, x, dy) \quad (1 \leq i, j \leq N) \end{cases}$$

が存在すれば（これが $\{p(t,x,dy)\}$ に対する"連続性"の仮定である），(1.4)式から次を得る：

$$(1.6)\qquad \mathfrak{A}u(x) = Au(x)$$
$$\equiv \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x).$$

ここで，a^{ij}，c は (1.5) 式によって

$$(1.7)\qquad \begin{cases} a^{ij}(x) = a^{ji}(x) \quad (1 \leqq i, j \leqq N); \quad \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq 0, \ \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N; \\ c(x) \leqq 0 \end{cases}$$

をみたすことに注意しよう．

これらのことは Kolmogoroff [16] によって最初に示された．

2) 境界 ∂D の点 x' では，x' の近傍における局所座標を $(x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$ とすると，（より複雑ではあるが） 1) と同様な推論によって，任意の $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \cap C^2(\bar{D})$ は境界条件：

$$(1.8)\qquad Lu(x') \equiv \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x')\frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x')u(x')$$
$$+ \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') - \delta(x')Au(x')$$
$$= 0$$

をみたすことが Ventcel' [28] によって示された．ただし，

$$(1.9)\qquad \begin{cases} \alpha^{ij}(x') = \alpha^{ji}(x') \quad (1 \leqq i, j \leqq N-1); \quad \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j \geqq 0, \ \xi' = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}. \\ \mu(x') \geqq 0; \quad \gamma(x') \leqq 0; \quad \delta(x') \geqq 0. \\ n \text{ は } x' \text{ における } \partial D \text{ の内向き単位法線ベクトル}. \end{cases}$$

注意 1.5　1° Ventcel' の境界条件 L の各項は，確率論的には，$\sum_{i,j}\alpha^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \beta^i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ は境界に沿っての拡散，γu は境界での吸収（消滅），$\mu\frac{\partial u}{\partial n}$ は n に沿っての境界での反射，δAu は δ に比例する時間だけの境界での滞留を表わしている．

2° μ と δ との関係について（他の項との関連は無視して）簡単に触れよう（例えば [5] を参照されたい）．

— $\mu(x')=0$, $\delta(x')>0$ ならば，粒子は x' にじっとしていて内部には戻らない．

— $\mu(x')>0$, $\delta(x')>0$ ならば，粒子は $\delta(x')$ に比例する時間だけ x' に滞在してから内部に戻る．

— $\mu(x')>0$, $\delta(x')=0$ ならば，粒子は内部に戻り，x' での滞在時間（の合計）はゼロである．

以上のことから，$\bar{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0\le t<\infty}$ の生成作用素 $\mathfrak{A}$ は，対応する $\bar{D}$ 上の Markov 過程 $\mathcal{M}$ が "局所的" 且 "連続的" ならば，内部 D では (1.6), (1.7) で与えられる 2 階の（退化する楕円型）微分作用素 A に等しく，境界 ∂D では (1.8), (1.9) で与えられる Ventcel' の境界条件 L をみたすことがわかった．

そこで，われわれは問題 I を次の形に定式化して考察しよう．

$\boxed{\text{問題 II}}$ "(1.6), (1.7) で与えられる微分作用素 A と (1.8), (1.9) で与えられる境界条件 L が具体的にどのような条件をみたせば，実際に $\bar{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0\leqq t<\infty}$ が存在するか".

次節では，問題 II に対する解答を A と L の境界値問題に対する解の存在，一意性，正則性の条件の形でのべる.

§2. 一般的な結果

§1 でのべた (1.6) ～ (1.9) は "Pointwise" な条件であって，微分作用素 A や境界条件 L の係数の Regularity については何の情報も得られていないことに注意しよう.

本稿では，係数がすべて C^∞ の場合に限って考察しよう. より詳しく，

1° (1.6) 式で与えられる微分作用素 A に対しては，次を仮定する： $\bar{D}$ を含む $\mathbb{R}^N$ の開集合 G が存在して

$$
(2.1)\quad
\begin{cases}
a^{ij} \in C^\infty(G)\ ;\quad a^{ij}(x) = a^{ji}(x),\quad x \in G \quad (1 \leqq i, j \leqq N), \\
\quad \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq 0,\ x \in G,\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N. \\
b^i \in C^\infty(G) \quad (1 \leqq i \leqq N). \\
c \in C^\infty(G)\ ;\quad c(x) \leqq 0 \quad in\ D.
\end{cases}
$$

2° (1.8)式で与えられる境界条件 L に対しては，次を仮定する：

$$(2.2)\quad \begin{cases} \alpha^{ij} \in C^\infty(\partial D)\,;\ \ \alpha^{ij}(x') = \alpha^{ji}(x'),\ \ x' \in \partial D\ \ (1 \leqq i, j \leqq N-1), \\ \quad \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\,\xi_i \xi_j \geqq 0,\ \ x' \in \partial D,\ \xi' = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{N-1}) \in T^*_{x'}\partial D. \\ \beta^i \in C^\infty(\partial D)\ \ (1 \leqq i \leqq N-1). \\ \gamma \in C^\infty(\partial D)\,;\ \ \gamma(x') \leqq 0 \ \ \text{on}\ \ \partial D. \\ \mu \in C^\infty(\partial D)\,;\ \ \mu(x') \geqq 0 \ \ \text{on}\ \ \partial D. \\ \delta \in C^\infty(\partial D)\,;\ \ \delta(x') \geqq 0 \ \ \text{on}\ \ \partial D. \end{cases}$$

さて，§1でのべたことを考慮して，次のようにして $\overline{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0 \leqq t < \infty}$ を構成してみよう．

1) まず，微分作用素 $\alpha - A$ $(\alpha \geqq 0)$ に対する Dirichlet 問題の Green 作用素 G^0_α と調和作用素 H_α を使って，境界値問題

$$(*)\quad \begin{cases} (\alpha - A)u = f & \text{in } D, \\ Lu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

を境界 ∂D 上の方程式（これは古典的な Fredholm の積分方程式に対応する）に帰着する．

2) 次に，この ∂D 上の方程式を解くことによって ∂D 上の Feller 半群 $\{S^\alpha_t\}_{0 \leqq t < \infty}$ を構成し，$\{S^\alpha_t\}$ から $\overline{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}$ を構成する．（$\{S^\alpha_t\}$ と $\{T_t\}$ の関係の確率論的な解釈については Ueno [26] を参照されたい．）

ステップ 1)のためには微分作用素 $\alpha - A$ $(\alpha \geqq 0)$ に対する Dirichlet 問題が一意可解的でなければならないが，これについては

<u>定理 2.1</u> ([1], [22]) (1.6), (2.1) で与えられる微分作用素 A が次の仮定 (H) をみたしているとする．

(H) ベクトル場 $X_j = \sum_{k=1}^{N} a^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(1 \leqq j \leqq N)$ によって $\mathbb{R}$ 上生成される Lie algebra $\mathcal{L}(X_1, X_2, \cdots, X_N)$ の階数が D のすべての点で N であって，さらに，境界 ∂D は作用素 A に対して非特性的，すなわち，$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij} n_i n_j > 0$ on ∂D とする．ただし，$n = (n_1, n_2, \cdots, n_N)$ は ∂D の内向き単位法線ベクトルである．

このとき，$\alpha \geqq 0$ ならば，任意の $f \in C(\bar{D})$ と $\varphi \in C(\partial D)$ に対して Dirichlet 問題：

$$
(\mathrm{D}) \qquad \begin{cases} (\alpha - A) u = f & \text{in } D, \\ u|_{\partial D} = \varphi & \text{on } \partial D \end{cases}
$$

は一意的な解 $u \in C(\bar{D})$ をもつ．

<u>注意 2.2</u> 仮定 (H) の確率論的意味について触れよう．Stroock－Varadhan [22] によれば，微分作用素 $\sum_{i,j} a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ に対応する G $(\supset \bar{D})$ 上の拡散過程 $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \cdots, X_N(t))$ が D の点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ を出発してから t 秒後に"到達"できる点は，次式で与えられる $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_N(t))$ で近似される：

$$
(2.3)\qquad \begin{cases} \phi_i(t) = x_i + 2\displaystyle\int_0^t \sum_{j=1}^{N} a^{ij}(\phi(s))\,\psi_j(s)\,ds \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^t \Big(b^i(\phi(s)) - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}(\phi(s)) \Big)\, ds \, . \end{cases}
$$

ここで, $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, \psi_N(t)) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ は有界可測函数であって, $\mathbb{R}^N$ の Brown 運動を近似している.

一方, Chow [3] によって次の結果が知られている.

<u>定理 2.3</u>　D 上のなめらかな実ベクトル場 $\{Z_j\}_{j=1}^{r}$ によって $\mathbb{R}$ 上生成される Lie algebra $\mathcal{L}(Z_1, Z_2, \cdots, Z_r)$ の階数が D の点 x_0 で N ならば, x_0 の適当な近傍 $V(x_0)$ が存在して, $V(x_0)$ 内の任意の点 x は x_0 とベクトル場 $\pm Z_j$ $(1 \leqq j \leqq r)$ の有限個の積分曲線からなる鎖によって結ぶことができる.

従って, (2.3)式と定理 2.3 とによって, 仮定 (H) は D 内の任意の点 x を出発した粒子が<u>有限時間</u>で必ず $\overline{D}$ の外に出ることを意味している.

ステップ 2) については, ∂D 上の Feller 半群 $\{S_t^{\alpha}\}$ $(\alpha \geqq 0)$ から $\overline{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}$ を必ずしも構成できるとは限らないので, そのための十分条件として

<u>定義 2.4</u> ([2], [20])　(1.8), (2.2) で与えられる境界条件 L が

$$(2.4) \qquad \mu(x') + \delta(x') > 0 \quad \text{on } \partial D$$

をみたすとき, L は境界 ∂D 上で <u>Transversal</u> であるという.

((2.4)式の確率論的意味については注意1.5を参照されたい.)

以上の準備のもとに，問題Ⅱに対する解答をのべることができる．

<u>定理 2.5</u>　(1.6)，(2.1)で与えられる微分作用素 A は仮定(H)をみたし，(1.8)，(2.2)で与えられる境界条件 L は ∂D 上で Transversal であるとする．

次を仮定しよう：

[I]（解の存在）ある $\lambda \geqq 0$ と $\alpha \geqq 0$ が存在して，任意の $\varphi \in C^{\infty}(\partial D)$ に対して境界値問題

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = 0 & \text{in } D, \\ (\lambda - L)u = \varphi & \text{on } \partial D \end{cases}$$

が解 $u \in C^{\infty}(\bar{D})$ をもつ．

このとき，$\bar{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0 \leqq t < \infty}$ が存在し，その生成作用素 $\mathfrak{A}$ は次をみたす．

$$(2.5) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} \text{ の定義域 } \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \subset \{u \in C(\bar{D});\ Au \in C(\bar{D}),\ Lu = 0\}. \\ \mathfrak{A}u = Au, \quad u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}). \end{cases}$$

<u>注意 2.6</u>　(2.5)における Au は <u>Distribution</u> の意味でとる．また，境界 ∂D が微分作用素 A に対して非特性的ならば，$Au \in C(\bar{D})$ をみたす $u \in C(\bar{D})$ に対して境界への制限 $u|_{\partial D}$，$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D}$ を Distribution として定義することができる．実際，

それぞれ Sobolev 空間 $H^{-1/2}(\partial D)$, $H^{-3/2}(\partial D)$ に属することがいえる([9]). 従って, (1.8), (2.2) によって $Lu \in H^{-5/2}(\partial D)$ である.

生成作用素 $\mathfrak{A}$ の定義域 $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ をより具体的に特徴付けよう.

<u>定理 2.7</u> 微分作用素 A と境界条件 L に対する仮定および仮定 [I] は定理 2.5 と同じとし, さらに, 次を仮定しよう:

[II] (解の一意性) ある $\alpha > 0$ が存在して,

$$\begin{cases} u \in C(\bar{D}),\ (\alpha - A)u = 0 \ \text{in} \ D,\ Lu = 0 \ \text{on} \ \partial D \\ \Rightarrow \ u = 0 \ \text{in} \ D \end{cases}$$

が成り立つ.

このとき, 定理 2.5 で存在の保証されている $\bar{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0 \leqq t < \infty}$ の生成作用素 $\mathfrak{A}$ は次式で与えられる.

$$(2.5)' \quad \begin{cases} \mathfrak{A} \text{ の定義域 } \mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \{u \in C(\bar{D});\ Au \in C(\bar{D}),\ Lu = 0\}. \\ \mathfrak{A}u = Au,\ u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}). \end{cases}$$

<u>注意 2.8</u> 定理 2.7 は渡辺 [27] の定理 8.1, 定理 8.2 に対応していると思われる.

解の一意性 (仮定 [II]) は解の正則性と密接な関係がある. 実際, 次の結果を得る.

<u>系 2.9</u> 微分作用素 A と境界条件 L に対する仮定および仮定 [I] は定理 2.5 と同じとし, さらに, 次を仮定しよう:

[III]（解の正則性）　ある $\alpha > 0$ が存在して，

$$\begin{cases} u \in C(\overline{D}),\ (\alpha - A)u = 0 \text{ in } D,\ Lu \in C^\infty(\partial D) \\ \Rightarrow\ u \in C^\infty(\overline{D}) \end{cases}$$

が成り立つ．

このとき，定理 2.5 で存在の保証されている $\overline{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0 \leq t < \infty}$ の生成作用素 $\mathfrak{A}$ は $(2.5)'$ で与えられ，さらに，$\mathfrak{A}$ は微分作用素 A の空間 $\{u \in C^2(\overline{D})\ ;\ Lu = 0\}$ への制限 $A|_{\{u \in C^2(\overline{D})\ ;\ Lu = 0\}}$ の $C(\overline{D})$ における最小閉拡張と一致する．

一般に偏微分方程式論においては，解の一意性よりも解の正則性の方が判定しやすいので，定理 2.7 よりも系 2.9 の方が有用である．

§3．具体的な結果 ―― A が楕円型の場合 ――

この節では，微分作用素 A が $\overline{D}$ 上で一様に楕円型の場合，すなわち，ある定数 $c_0 > 0$ が存在して

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2,\quad x \in \overline{D},\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$$

が成り立っている場合に，系 2.9 を使って，$\overline{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0 \leq t < \infty}$ が存在するための十分条件を粒子の運動に密

着した具体的な形で与えよう.

さらに, 境界条件 L に対しても, 境界 ∂D 上の微分作用素: $\sum_{i,j} \alpha^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \beta^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ の確率論的意味を明確にするため (注意 3.2 を参照), 次を仮定しよう:

$$(1.8)' \quad Lu(x') = \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') \right]$$

$$+ \gamma(x') u(x') + \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') - \delta(x') Au(x')$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sigma^{ki}(x') \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \sigma^{kj}(x') \frac{\partial u}{\partial x_j}(x') \right) \right) + \sum_{i=1}^{N-1} \eta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') \right]$$

$$+ \gamma(x') u(x') + \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') - \delta(x') Au(x').$$

ただし,

$$\begin{cases} \sigma^{ki} \in C^\infty(\partial D); \quad \sigma^{ki}(x') = \sigma^{ik}(x'), \ x' \in \partial D \quad (1 \leqq k, i \leqq N-1), \\ \eta^i \in C^\infty(\partial D) \quad (1 \leqq i \leqq N-1) \end{cases}$$

であって, $Y_k = \sum_{i=1}^{N-1} \sigma^{ki} \frac{\partial}{\partial x_i}$ $(1 \leqq k \leqq N-1)$, $Z = \sum_{i=1}^{N-1} \eta^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ は境界 ∂D 上の<u>ベクトル場</u>である.

本稿の主結果は次の定理である.

<u>定理 3.1</u>　(1.6), (2.1) で与えられる微分作用素 A は $\overline{D}$ 上で一様に楕円型, (1.8)$'$, (2.2) で与えられる境界条件 L は ∂D 上で Transversal であるとする.

次を仮定しよう：

(A) ベクトル場 $Y_K = \sum_{i=1}^{N-1} \sigma^{Ki} \frac{\partial}{\partial x_i}$ $(1 \leqq K \leqq N-1)$ によって $\mathbb{R}$ 上生成される Lie algebra $\mathcal{L}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{N-1})$ の階数が集合 $M = \{x' \in \partial D; \mu(x') = 0\}$ 上で $N-1$ である.

このとき，$\overline{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0 \leqq t < \infty}$ が存在し，その生成作用素 $\mathfrak{A}$ は $(2.5)'$ で与えられ，さらに，$\mathfrak{A}$ は微分作用素 A の空間 $\{u \in C^2(\overline{D});\ Lu = 0\}$ への制限 $A|_{\{u \in C^2(\overline{D});\ Lu=0\}}$ の $C(\overline{D})$ における最小閉拡張と一致する.

注意 3.2　仮定 (A) の確率論的意味についてのべよう．微分作用素 $\sum_{i,j} \alpha^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \beta^i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_K Y_K^2 + Z$ に対応する境界 ∂D 上の拡散過程 $\xi(t) = (\xi^1(t), \xi^2(t), \cdots, \xi^{N-1}(t))$ は，$x' \in \partial D$ を出発点とすると，確率微分方程式：

$$
(3.1) \qquad \begin{cases} d\xi^i(t) = \sum_{K=1}^{N-1} \sigma^{iK}(\xi(t)) \circ dB^K(t) + \eta^i(\xi(t))\,dt \quad (1 \leqq i \leqq N-1), \\ \xi(0) = x' \end{cases}
$$

の解として与えられる（例えば，[12]）．ここで，$\circ$ は Fisk-Stratonovich 式の確率微分，$B(t) = (B^1(t), B^2(t), \cdots, B^{N-1}(t))$ は $\mathbb{R}^{N-1}$ の Brown 運動である.

一方，Stroock-Varadhan [21] によれば，(3.1)式の解 $\xi(t)$ は次式で与えられる $\phi(t) = (\phi^1(t), \phi^2(t), \cdots, \phi^{N-1}(t))$ で近似される：

$$
(3.1)' \qquad \phi^i(t) = x_i + \int_0^t \sum_{j=1}^{N-1} \sigma^{ij}(\phi(s))\,\psi^j(s)\,ds + \int_0^t \eta^i(\phi(s))\,ds \quad (1 \leqq i \leqq N-1).
$$

ここで, $\psi(t)=(\psi^1(t),\psi^2(t),\cdots,\psi^{N-1}(t)):[0,\infty)\longrightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ は有界可測函数であって, Brown 運動 $B(t)$ を近似している.

従って, $(3.1)'$ 式と定理2.3とによって, 仮定(A)は反射が起こらない点の集合 M の任意の点 x' を出発した粒子が有限時間で必ず M の外に出ることを意味している.

§4. 定理2.5, 定理2.7, 系2.9の証明(概略)

(1.6), (2.1)で与えられる微分作用素 A が仮定(H)をみたせば, 定理2.1によって, $\alpha \geqq 0$ に対して作用素

$$\begin{cases} G_\alpha^0 : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\overline{D}) & (\text{Green作用素}), \\ H_\alpha : C(\partial D) \longrightarrow C(\overline{D}) & (\text{調和作用素}) \end{cases}$$

をそれぞれ次式で定義することができる.

$$(4.1) \qquad \begin{cases} (\alpha - A) G_\alpha^0 f = f & \text{in } D, \\ G_\alpha^0 f|_{\partial D} = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

$$(4.2) \qquad \begin{cases} (\alpha - A) H_\alpha \varphi = 0 & \text{in } D, \\ H_\alpha \varphi|_{\partial D} = \varphi & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

このとき, 作用素 G_α^0, H_α の確率論的表示式によって, G_α^0, H_α は非負且有界であり, G_α^0 の作用素ノルムは $\alpha>0$ ならば $\frac{1}{\alpha}$ で抑えられ, H_α の作用素ノルムは1で抑えられることがわかる([22]).

一方，仮定から Lie algebra $\mathcal{L}(X_1, X_2, \cdots, X_N)$ の階数が D のすべての点で N だから，Oleĭnik - Radkevič [18] の結果によって，微分作用素 $\alpha - A$ は D で Hypoelliptic であり，特に

$$u \in \mathcal{D}'(D),\ (\alpha - A)u \in C^\infty(D) \Rightarrow u \in C^\infty(D)$$

が成り立つ．従って，(4.1) の第1式，(4.2) の第1式によってそれぞれ次の "内部" 正則性を得る：

(4.3) $\quad f \in C^\infty(D) \Rightarrow G_\alpha^0 f \in C^\infty(D).$

(4.4) $\quad \varphi \in C(\partial D) \Rightarrow H_\alpha \varphi \in C^\infty(D).$

さらに，仮定から境界 ∂D が微分作用素 A に対して非特性的だから，微分作用素 $\alpha - A$ は D で Partially Hypoelliptic，すなわち，Tangential 方向について C^∞ ならば Normal 方向についても C^∞ である（[9]）．従って，(4.1) の第2式と (4.3)，(4.2) の第2式と (4.4) とによってそれぞれ次の "境界までこめた" 正則性を得る：

(4.3)$'$ $\quad f \in C^\infty(\bar{D}) \Rightarrow G_\alpha^0 f \in C^\infty(\bar{D}).$

(4.4)$'$ $\quad \varphi \in C^\infty(\partial D) \Rightarrow H_\alpha \varphi \in C^\infty(\bar{D}).$

(1.8)，(2.2) で与えられる境界条件 L に対して，正則性 (4.3)$'$ によって，線型作用素 $L G_\alpha^0 : C(\bar{D}) \to C(\partial D)$ を次式で定義することができる．

$$\begin{cases} LG_\alpha^0 \text{ の定義域 } \mathcal{D}(LG_\alpha^0) = C^\infty(\overline{D}). \\ LG_\alpha^0 f = L(G_\alpha^0 f), \quad f \in \mathcal{D}(LG_\alpha^0). \end{cases}$$

このとき，G_α^0 が非負であることと (4.1) の第２式，(4.3)$'$ とによって，LG_α^0 が非負且有界な作用素

$$\overline{LG_\alpha^0} : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\partial D)$$

に（一意的に）拡張されることがわかる．

また，正則性 (4.4)$'$ によって，線型作用素 $LH_\alpha : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$ を次式で定義することができる．

$$\begin{cases} LH_\alpha \text{ の定義域 } \mathcal{D}(LH_\alpha) = C^\infty(\partial D). \\ LH_\alpha \psi = L(H_\alpha \psi), \quad \psi \in \mathcal{D}(LH_\alpha). \end{cases}$$

このとき，次にのべる定理 4.1（最大値の原理）によって定理 1.4 の条件 b)$'$ が $K \leftrightarrow \partial D$，$B \leftrightarrow LH_\alpha$ としてみたされていることがわかり，作用素 LH_α の $C(\partial D)$ における最小閉拡張

$$\overline{LH_\alpha} : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$$

が存在することが従う．

定理 4.1（[25]）　(1.6)，(2.1) で与えられる微分作用素 A が仮定 (H) をみたしているとする．このとき，任意の $\alpha \geq 0$ に対して次が成り立つ：

i)　$u \in C^2(D)$ が $(A-\alpha)u \geq 0$ in D をみたし，D で恒等的に定数でなければ，u は D 内で非負の最大値をとらない．

ii) $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ が $(A-\alpha)u \geqq 0$ in D をみたし，D で恒等的に定数でなければ，u の $\overline{D}$ における非負の最大値は境界の点 x_0' で達成され，もし $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0')$ が存在すれば，$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0') < 0$ である．

定理 4.1 の証明について簡単に触れよう：(1.6)，(2.1) で与えられる微分作用素 A に対する非負の最大値の伝播のメカニズムは，Bony [1]，Oleĭnik - Radkevič [18]，Stroock-Varadhan [22] 等によって完全に解明されている．彼らの結果を"標語的"にのべれば次の通りである．

『非負の最大値はベクトル場 $X_j = \sum_{k=1}^{N} a^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(1 \leqq j \leqq N)$ の積分曲線に沿っては正の方向にも負の方向にも伝わり，ベクトル場 $X_0 = \sum_{j=1}^{N} \left(b^j - \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial a^{jk}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$ の積分曲線に沿っては正の方向にのみ伝わる』（A のゼロ階の項には依存しないことに注意．）

従って，この結果と定理 2.3 とによって，定理 4.1 の i) を得る．定理 4.1 の ii) は，境界 ∂D が微分作用素 A に対して非特性的なことに注意すれば，Oleĭnik [17] と同様にして示される．

以上の準備のもとに，定理 2.5，定理 2.7，系 2.9 を順に証明しよう．証明の方針は Sato - Ueno [20] と同じである．

<u>定理 2.5 の証明</u>　Dirichlet 問題 (D) の解の一意性 (定理 2.1) によって，$u \in C(\overline{D})$, $(\alpha - A)u = 0$ in D ならば，$u = H_\alpha(u|_{\partial D})$ とかくことができる．従って，定理 2.5 の仮定 [I] は，ある $\lambda \geqq 0$ と $\alpha \geqq 0$ に対して値域 $\mathcal{R}(\lambda - LH_\alpha)$ が $C^\infty(\partial D)$ を含むことを意味する．$C^\infty(\partial D)$ は $C(\partial D)$ で dense だから定理 1.4 の条件 c)′ が $K \leftrightarrow \partial D$, $B \leftrightarrow LH_\alpha$, $\alpha_0 \leftrightarrow \lambda$ としてみたされ，<u>ある</u> $\alpha \geqq 0$ に対して LH_α の最小閉拡張 $\overline{LH_\alpha}$ が ∂D 上の Feller 半群 $\{S_t^\alpha\}_{0 \leqq t < \infty}$ を生成することがわかる．

ある $\alpha \geqq 0$ に対して $\overline{LH_\alpha}$ が ∂D 上の Feller 半群 $\{S_t^\alpha\}$ を生成すれば，"Perturbation" によって，<u>すべて</u>の $\alpha \geqq 0$ に対して $\overline{LH_\alpha}$ が ∂D 上の Feller 半群 $\{S_t^\alpha\}$ を生成することが従う．また，定義域 $\mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})$ が $\alpha \geqq 0$ に依らないこともいえるので，その共通の定義域を $\widetilde{\mathcal{D}}$ とおこう：

$$\widetilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}(\overline{LH_\alpha}) \quad (\alpha \geqq 0).$$

さらに，境界条件 L が ∂D 上で Transversal ならば，任意の $\alpha > 0$ に対して作用素 $\overline{LH_\alpha}$ は 1 to 1 であって，その逆作用素

$$\overline{LH_\alpha}^{-1} : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$$

が非正且有界であることがわかる．

従って，任意の $\alpha > 0$ に対して線型作用素 $G_\alpha : C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$ を次式で定義することができる．

(4.5)　$G_\alpha f = G_\alpha^0 f - H_\alpha\left(\overline{LH_\alpha}^{-1}\left(\overline{LG_\alpha^0}\, f\right)\right), \quad f \in C(\overline{D}).$

このとき，線型作用素 $\mathfrak{A}: C(\bar{D}) \longrightarrow C(\bar{D})$ を

$$\begin{cases} \mathfrak{A} \text{ の定義域 } \mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \{u \in C(\bar{D});\ Au \in C(\bar{D}),\ u|_{\partial D} \in \tilde{\mathcal{D}},\ Lu = 0\}, \\ \mathfrak{A} u = Au, \quad u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \end{cases}$$

で定義すると（これが (2.5) 式である），

(4.6) $\qquad G_\alpha = (\alpha - \mathfrak{A})^{-1}, \quad \alpha > 0$

が成り立つ．

実際，任意の $f \in C(\bar{D})$ に対して $u = G_\alpha f$ とおけば，(4.1)，(4.2) によって

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = f \quad in\ D, \\ u|_{\partial D} = -\overline{LH_\alpha}^{-1}(\overline{LG_\alpha^0} f) \in \tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}(\overline{LH_\alpha}), \\ Lu = 0 \quad on\ \partial D \end{cases}$$

が従い，$u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$，$(\alpha - \mathfrak{A})u = f$ を得る．すなわち，$\alpha - \mathfrak{A}$ は onto である．従って，(4.6) 式を示すには，$\alpha - \mathfrak{A}$ が 1 to 1 であることをいえばよい：$u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$，$(\alpha - \mathfrak{A})u = 0$ とすると，Dirichlet問題 (D) の解の一意性によって $u = H_\alpha(u|_{\partial D})$，$u|_{\partial D} \in \tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})$ だから

$$0 = Lu = \overline{LH_\alpha}(u|_{\partial D})$$

が従う．$\alpha > 0$ に対して作用素 $\overline{LH_\alpha}$ は 1 to 1 であるから，これから $u|_{\partial D} = 0$，従って $u = 0$ を得る．

作用素 $G_\alpha = (\alpha - \mathfrak{A})^{-1}$ の表現式 (4.5) を使えば，Sato-Ueno [20] と同様にして定理 1.3 の条件 a) ～ d) がすべてみたされて

いることがわかり，作用素 $\mathfrak{A}$ が $\overline{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0\leqq t<\infty}$ を生成することが従う．

注意 4.2　(4.5) 式からわかるように，∂D 上の Feller 半群 $\{S_t^\alpha\}_{0\leqq t<\infty}$ の Green 作用素 $-\overline{LH_\alpha}^{-1}$ を使って $\overline{D}$ 上の Feller 半群 $\{T_t\}_{0\leqq t<\infty}$ の Green 作用素 $(\alpha-\mathfrak{A})^{-1}$ を構成したことに注意しよう．

定理 2.7 の証明　仮定 [I], [II] が成り立てば，

$$\mathcal{D}(\mathfrak{A}) \equiv \{u\in C(\overline{D})\,;\ Au\in C(\overline{D}),\ u|_{\partial D}\in\widetilde{\mathcal{D}},\ Lu=0\}$$
$$= \{u\in C(\overline{D})\,;\ Au\in C(\overline{D}),\ Lu=0\}$$

であることをいえばよい．

$u\in C(\overline{D})$, $Au\in C(\overline{D})$, $Lu=0$ とする．$w=u-G_\alpha((\alpha-A)u)$ とおくと，(4.6) によって w は

$$\begin{cases}(\alpha-A)w=0 & \text{in } D,\\ Lw=0 & \text{on } \partial D\end{cases}$$

をみたすから，仮定 [II] によって $w=0$，従って $u=G_\alpha((\alpha-A)u)\in\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ を得る．

系 2.9 の証明　1° まず，仮定 [I], [III] から仮定 [II] が従うことを示そう．

$u\in C(\overline{D})$ が

$$\begin{cases}(\alpha - A)u = 0 & in\ D,\\ Lu = 0 & on\ \partial D\end{cases}$$

をみたせば，仮定［III］より $u \in C^\infty(\overline{D})$ だから，Dirichlet問題（D）の解の一意性によって $u = H_\alpha(u|_{\partial D})$，$u|_{\partial D} \in \mathcal{D}(LH_\alpha) = C^\infty(\partial D)$ とかくことができ，

(4.7) $\quad 0 = Lu = LH_\alpha(u|_{\partial D})$

を得る．定理2.5の証明でのべたように，任意の $\alpha > 0$ に対して作用素 LH_α の最小閉拡張 $\overline{LH_\alpha}$ は1対1だから，(4.7)から $u|_{\partial D} = 0$，従って $u = 0$ を得る．

2° 次に，仮定［III］が成り立てば，

(4.8) $\quad f \in C^\infty(\overline{D}) \Longrightarrow G_\alpha f \in C^\infty(\overline{D})$

であることを示そう．

$f \in C^\infty(\overline{D})$ ならば，正則性 (4.3)′ によって $G_\alpha^0 f \in C^\infty(\overline{D})$ だから，$w = H_\alpha\left(\overline{LH_\alpha}^{-1}(LG_\alpha^0 f)\right)$ とおくと，

$$\begin{cases}(\alpha - A)w = 0 & in\ D,\\ Lw = LG_\alpha^0 f \in C^\infty(\partial D)\end{cases}$$

が成り立ち，仮定［III］より $w \in C^\infty(\overline{D})$ が従う．よって，(4.5)式から $G_\alpha f \in C^\infty(\overline{D})$ を得る．

3° 最後に，(2.5)′式で定義される作用素 $\mathfrak{A}$ が微分作用素 A の空間 $\{u \in C^2(\overline{D});\ Lu = 0\}$ への制限 $A|_{\{u \in C^2(\overline{D});\ Lu = 0\}}$ の $C(\overline{D})$ における最小閉拡張と一致することを示そう．

$u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ に対して

(4.9) $\quad f_j \longrightarrow (\alpha - \mathfrak{A})u \quad in \quad C(\overline{D}) \quad (j \to \infty)$

をみたす $C^\infty(\overline{D})$ の近似列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ を選び, $u_j = G_\alpha f_j$ とおこう.
このとき, (4.6), (4.8) によって $u_j \in C^\infty(\overline{D})$, $(\alpha - A)u_j = f_j$, $Lu_j = 0$ が成り立ち, さらに, Green 作用素 $G_\alpha : C(\overline{D}) \longrightarrow C(\overline{D})$ は有界だから, (4.9) から $u_j = G_\alpha f_j \longrightarrow G_\alpha(\alpha - \mathfrak{A})u = u \ in \ C(\overline{D})$, 従って $Au_j = \alpha u_j - f_j \longrightarrow \alpha u - (\alpha - \mathfrak{A})u = \mathfrak{A}u \ in \ C(\overline{D})$ を得る. これから

作用素 $\mathfrak{A}$ のグラフ

$\equiv \{(u, \mathfrak{A}u) ;\ u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})\}$

$= \{(u, Au) ;\ u \in C^2(\overline{D}),\ Lu = 0\}$ の $C(\overline{D}) \oplus C(\overline{D})$ における閉包

であることがわかる.

§5. 定理 3.1 の証明（概略）

系 2.9 の仮定 [I], [III] が成り立っていることをいえばよいが, それは次の定理と Sobolev の補題から従う.

<u>定理 5.1</u> (1.6), (2.1) で与えられる微分作用素 A は $\overline{D}$ 上で一様に楕円型, (1.8)', (2.2) で与えられる境界条件 L は ∂D 上で Transversal であるとする.

仮定 (A) がみたされていれば，ある定数 $0<k\leqq 1$ が存在して，任意の $\alpha>0$ に対して境界値問題：

$$
(*)\qquad \begin{cases} (\alpha - A)u = f & \text{in } D, \\ Lu = \phi & \text{on } \partial D \end{cases}
$$

は任意の $f\in H^{s-2}(D)$ と $\phi \in H^{s-5/2}(\partial D)$ $(s\geqq 3)$ に対して一意的な解 $u\in H^{s-(2-k)}(D)$ をもつ.

さらに，任意の $\alpha\geqq 0$ に対して

$$
(5.1)\qquad \begin{cases} u\in H^t(D)\ (t\in\mathbb{R}),\ (\alpha - A)u\in C^\infty(\bar{D}),\ Lu\in C^\infty(\partial D) \\ \Longrightarrow\ u\in C^\infty(\bar{D}) \end{cases}
$$

が成り立つ.

ここで，$H^s(D)$ と $H^s(\partial D)$ はそれぞれ D 上と ∂D 上の s 次の Sobolev 空間を表わす.

以下では定理 5.1 の証明の方針についてのべよう ([23], [24] を参照)：

1° Dirichlet問題 (D) の Green 作用素 G_α^0 と調和作用素 H_α を使えば，境界値問題 (*) に対する解の存在，一意性，正則性などの問題はすべて境界 ∂D 上の作用素 LH_α：

$$
\varphi \longrightarrow LH_\alpha\varphi = \left[\sum_{i,j=1}^{N-1}\alpha^{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1}\beta^i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right] + \gamma\varphi + \mu\frac{\partial}{\partial n}(H_\alpha\varphi)\Big|_{\partial D} - \alpha\delta\varphi
$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\sigma^{ki}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N-1}\sigma^{kj}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)\right)+\sum_{i=1}^{N-1}\gamma^i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right]+\gamma\varphi$$

$$+\mu\frac{\partial}{\partial n}(H_\alpha\varphi)\Big|_{\partial D}-\alpha\delta\varphi$$

に対するそれらの問題へと帰着されることがわかる.

2° この作用素 LH_α を, Hypoellipticity について Hörmander [10], Oleĭnik-Radkevič [18] 等によって詳しく研究されている2階の微分作用素 Q:

$$\varphi\to Q\varphi=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\sigma^{ki}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N-1}\sigma^{kj}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)\right)+\sum_{i=1}^{N-1}\gamma^i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+(\gamma-\alpha\delta)\varphi$$

と主シンボル $-\mu(x')|\xi'|$ をもつ1階の擬微分作用素 $\mu\Pi_\alpha$:

$$\varphi\longrightarrow\mu\Pi_\alpha\varphi=\mu\frac{\partial}{\partial n}(H_\alpha\varphi)\Big|_{\partial D}$$

とに分け, $\mu\Pi_\alpha$ の方を Q に対する<u>摂動項</u>とみなして [18] の議論を修正すれば, 次の命題が得られる.

<u>命題 5.2</u> 微分作用素 A と境界条件 L は定理 5.1 と同じとする. 仮定 (A) がみたされていれば, ある定数 $0<\kappa\leqq 1$ が存在して, 任意の $\alpha\geqq 0$ に対して次が成り立つ:

(5.2) $\varphi\in\mathcal{D}'(\partial D),\ LH_\alpha\varphi\in H^s(\partial D)\ (s\in\mathbb{R})\Longrightarrow\varphi\in H^{s+\kappa}(\partial D)$.

さらに, このとき, 任意の $t<s+\kappa$ に対して定数 $C_{s,t}>0$ が存在して, 不等式:

$$|\varphi|_{H^{s+\kappa}(\partial D)}\leqq C_{s,t}\left(|LH_\alpha\varphi|_{H^s(\partial D)}+|\varphi|_{H^t(\partial D)}\right)$$

が成り立つ.

<u>注意 5.3</u>　Lie algebra $\mathcal{L}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{N-1})$ の階数が $N-1$ である点 x_0' の近傍では, $\mathcal{L}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{N-1})$ の長さを $R_0 (\geqq 1)$ とすれば, $k = 2^{1-R_0}$ にとることができ ([18]), $\mu(x_0') > 0$ である点 x_0' の近傍では $k = 1$ にとることができる ([11]).

作用素 LH_α に対する正則性 (5.2) から問題 (*) に対する<u>正則性</u> (5.1) が従う.

3° 任意の $\alpha > 0$ に対する問題 (*) の解の<u>一意性</u>は解の正則性 (5.1) と次の"境界条件付き最大値の原理"から従う.

<u>命題 5.4</u>　(1.6), (2.1) で与えられる微分作用素 A は仮定 (H) をみたし, (1.8), (2.2) で与えられる境界条件 L は ∂D 上で Transversal であるとする.

このとき, 任意の $\alpha > 0$ に対して

$$\begin{cases} u \in C^2(\bar{D}), \quad (A-\alpha)u \geqq 0 \ \text{in}\ D, \quad Lu \geqq 0 \ \text{on}\ \partial D \\ \Longrightarrow \quad u \leqq 0 \ \text{on}\ \bar{D} \end{cases}$$

が成り立つ.

命題 5.4 は定理 4.1 から得られる.

4° 任意の $\alpha > 0$ に対する問題 (*) の<u>可解性</u>を示そう.

a) Agmon-Nirenberg に示唆されて単位円 S を導入し, 問題 (*) におけるパラメーター α を S 上の 2 階の微分作用素 $-\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ に置き換えた境界値問題:

$$(\tilde{*}) \qquad \begin{cases} \left(-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - A\right)\tilde{u} = \tilde{f} & \text{in } D \times S, \\ L\tilde{u} = \tilde{\varphi} & \text{on } \partial D \times S \end{cases}$$

を考えよう．

このとき，粗くいって，次のことが成り立つ（[25]）：『問題 $(\tilde{*})$ の Index が有限（すなわち，問題 $(\tilde{*})$ の斉次解全体が有限次元であって，さらに，有限個の直交条件をみたすデータ $(\tilde{f}, \tilde{\varphi})$ に対して問題 $(\tilde{*})$ の解 $\tilde{u}$ が存在する）ならば，任意の $\alpha \geq 0$ に対して問題 $(*)$ の Index はゼロである』

よって，問題 $(\tilde{*})$ の Index が有限であることを示せば，ステップ 3° の解の一意性定理によって，任意の $\alpha > 0$ に対する問題 $(*)$ の可解性が従う．

b) 問題 $(\tilde{*})$ の Index が有限であることを示そう．微分作用素 A が仮定 (H) をみたせば，$\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + A\right)$ に対する Dirichlet 問題が一意可解的であることがわかり（定理 2.1 を参照），調和作用素 $\tilde{H} : C(\partial D \times S) \longrightarrow C(\bar{D} \times S)$ を

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - A\right)\tilde{H}\tilde{\varphi} = 0 & \text{in } D \times S, \\ \tilde{H}\tilde{\varphi}\big|_{\partial D \times S} = \tilde{\varphi} & \text{on } \partial D \times S \end{cases}$$

で定義すると，ステップ 1° と同様に，問題 $(\tilde{*})$ は境界 $\partial D \times S$ 上の 2 階の擬微分作用素 $L\tilde{H}$：

$$\tilde{\varphi} \to L\tilde{H}\tilde{\varphi} = \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}\right] + \gamma\tilde{\varphi} + \delta \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial n}(\tilde{H}\tilde{\varphi})\Big|_{\partial D \times S}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sigma^{ki} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N-1} \sigma^{kj} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_j}\right)\right) + \sum_{i=1}^{N-1} \eta^i \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i}\right] + \gamma\tilde{\varphi}$$

$$+ \delta \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial n}(\tilde{H}\tilde{\varphi})\Big|_{\partial D \times S}$$

の考察に帰着される．

(2.4) 式より $\mu(x') = 0$ ならば $\delta(x') > 0$ であることに注意すれば，命題 5.2 と同様にして次の命題が得られる．

<u>命題 5.5</u>　微分作用素 A と境界条件 L は定理 5.1 と同じとする．仮定 (A) がみたされていれば，ある定数 $0 < \kappa \leqq 1$ が存在して，次が成り立つ：

$$\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}'(\partial D \times S),\ L\tilde{H}\tilde{\varphi} \in H^s(\partial D \times S)\ (s \in \mathbb{R}) \Longrightarrow \tilde{\varphi} \in H^{s+\kappa}(\partial D \times S).$$

さらに，このとき，任意の $t < s+\kappa$ に対して定数 $\tilde{C}_{s,t} > 0$ が存在して，不等式：

$$|\tilde{\varphi}|_{H^{s+\kappa}(\partial D \times S)} \leqq \tilde{C}_{s,t} \left(|L\tilde{H}\tilde{\varphi}|_{H^s(\partial D \times S)} + |\tilde{\varphi}|_{H^t(\partial D \times S)}\right)$$

が成り立つ．

この命題から問題 $(\tilde{*})$ の斉次解全体が有限次元であることが従う．また，擬微分作用素 $L\tilde{H}$ の形式的共役作用素 $(L\tilde{H})^*$ に対しても命題 5.5 の結論が成立することがわかり，有限個の直交条件をみたすデータ $(\tilde{f}, \tilde{\varphi})$ に対して問題 $(\tilde{*})$ の解 $\tilde{u}$

が存在することが従う．よって，問題(※̃)の Index は有限である．

参考文献

[1] J.-M. Bony, Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 19 (1969), 277-304.

[2] J.-M. Bony, P. Courrège et P. Priouret, Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 18 (1968), 369-521.

[3] W.L. Chow, Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Ann., 117 (1939), 98-105.

[4] E.B. Dynkin, Infinitesimal operators of Markov processes, Th. of Prob. and its Appl., 1 (1956), 38-60.

[5] E.B. Dynkin and A.A. Yushkevich, Markov processes, Theorems and problems, Plenum Press, New York, 1969.

[5]' ドゥインキン－ユシュケヴィッチ，マルコフ過程，定理と問題，文一総合出版，1972.

[6] W. Feller, The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, Ann. of Math., 55 (1952), 468-519.

[7] W. Feller, On second order differential operators, Ann. of Math., 61 (1955), 90-105.

[8] E. Hille and R.S. Phillips, Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 31, Providence, 1957.

[9] L. Hörmander, Linear partial differential operators, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[10] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math., 119 (1967), 147-171.

[11] L. Hörmander, A class of hypoelliptic pseudo-differential operators with double characteristics, Math. Ann., 217 (1975), 165-188.

[12] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes (to appear).

[13] 伊藤清, 確率論, 岩波書店, 1953.

[14] 伊藤清, 確率過程, 岩波現代応用数学講座, 岩波書店, 1957.

[15] K. Itô and H.P. Mckean, Jr., Diffusion processes and their sample paths, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[16] A.N. Kolmogoroff, Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., 104 (1931), 415-458.

[17] O.A. Oleĭnik, On properties of solutions of certain boundary problems for equations of elliptic type, Mat. Sb., 30 (1952), 695-702 (Russian).

[18] O.A. Oleĭnik and E.V. Radkevič, Second order equations with nonnegative characteristic form, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island and Plenum Press, New York, 1973.

[19] D. Ray, Stationary Markov processes with continuous paths, Trans. Amer. Math. Soc., 82 (1956), 452-493.

[20] K. Sato and T. Ueno, Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ., 4 (1965), 529-605.

[21] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan, On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle, Proc. of 6-th Berkeley Symp. of Prob. and Math. Stat., Vol. III (1972), 333-359.

[22] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan, On degenerate elliptic-parabolic operators of second order and their associated diffusions, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1972), 651-713.

[23] K. Taira, Sur l'existence de processus de diffusion, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 23 (1979).

[24] 平良和昭, 拡散過程の存在について "線型微分方程式の超局所解析" 数理解析研究所講究録 355, 1979.

[25] 平良和昭, 二階楕円型微分作用素の境界値問題, 上智大学数学講究録 No. 6, 1980.

[26] T. Ueno, The diffusion satisfying Wentzell's boundary condition and the Markov process on the boundary, I, II, Proc. Japan Acad., 36 (1960), 533-538 ; 625-629.

[27] 渡辺信三, 確率微分方程式, 産業図書, 1975.

[28] A.D. Wentzell (Ventcel'), On boundary conditions for multidimensional diffusion processes, Th. of Prob. and its Appl., 4 (1959), 164-177.

[29] K. Yosida, Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1965.